



TITLE:

圧縮性流体における平面非線型波  
の相互作用と2次元衝撃波乱流 (連  
続体力学における非線型方程式の  
近似解法)

AUTHOR(S):

徳永, 宏; 巽, 友正

---

CITATION:

徳永, 宏 ...[et al]. 圧縮性流体における平面非線型波の相互作用と2次元衝撃波乱流 (連続体力学における非線型方程式の近似解法). 数理解析研究所講究録 1975, 244: 129-146

ISSUE DATE:

1975-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105610>

RIGHT:

圧縮性流体における  
平面非線型波の相互作用と2次元衝撃波乱流

京工繊大・工 徳永 宏  
京大・理 巽 友正

§1. 序

圧縮性流体における超音速の流れは、境界壁が滑らかな場合でさえも不連続であって、衝撃波・接触不連続面・滑り流のような不連続面が存在する。圧縮性流体における乱流運動もまた、全ての不連続面を含み、実際それらは、あらゆる方向に伝播する衝撃波等の不連続面のランダムな集合である(Lighthill<sup>1)</sup>)。従って層流あるいは乱流を問わず、圧縮性流体における流れを理解するためには、これらの不連続面の性質とそれらの間の相互作用を知ることが必要である。ところで圧縮性流体における不連続面は、常に媒質中の非線型波の発展の結果形成されるので、後者を調べれば、前者の性質が明らかにされる。

圧縮性流体における非線型波の力学は、古典的な問題であ

って、多くの研究がなされている (Courant & Friedrichs<sup>2)</sup>) が、得られている結果は、大部分特別なタイプの問題についてであり、非線型波の一般的性質は、十分には明らかにされていない。系統的な取り扱いがなされているのは、小さいが有限の振幅を持つ一次元の弱い非線型の場合のみである<sup>3), 4), 5)</sup>。このときには、全ての非線型波が、位相速度  $\pm a_0, 0$  ( $a_0$ : 静止媒質中の音速) の3つの特性線のグループに分離され、最初の2つのグループは Burgers の方程式で支配され、衝撃波と膨張波からなり、最後のグループは、熱伝導方程式で支配され、接触不連続面を表す。波の間の相互作用については、異なった特性線に属する波の相互作用では、単に波の位相速度が変化するのみであるが、同じ特性線に属する波の相互作用では、2つの波の合体あるいは1つの波の他の波による吸収が生じる。この結果から、圧縮性流体における一次元の弱い衝撃波乱流は、それぞれ位相速度  $\pm a_0$  を持った、衝撃波と膨張波のランダムな集合になり、この衝撃波乱流の統計的性質は、Burgers 乱流に帰着される。

この論文の目的は、上の一次元の非線型波の取り扱いを二次元問題に拡張することにある。一般的に言って、圧縮性流体における不連続面は曲面で、非一様な流体にかこまれているが、1ないし2個の不連続面を含む微小な流体の部分を見

ると、曲面の曲率は無視でき、まわりの流体は一様と見なせる。このように、一般には複雑な形を持った圧縮性流体の任意の運動も、一様な流体でかこまれた1ないし2個の平面波を含む多数の局所場からなる。

2つの一様な領域に置かれた1つの平面非線型波は、一定速度 $U$ で伝播するので、速度 $-U$ を持ったGalilei変換で定常にできる。同様に、伝播速度がそれぞれ $U_1, U_2$ である2つの平面非線型波は、一定速度 $-(U_1 + U_2)$ を重ね合わせることにより定常にできる。このように、圧縮性流体場の局所的な構造を問題にする限りでは、流体の一様な領域でかこまれた平面定常波を取り扱えばよい。これが、この研究の主要な題目である。

## §2. 2次元超音速流中の定常非線型波

図2.1及び2.2は、折れ曲った境界壁に、一様な超音速流が吹きつけたときの流れ場のSchlieren写真とそれを説明した図である<sup>6)</sup>。図2.1では、壁から生じた衝撃波AとBが交差して、DとCになると同時に、新たに滑り流が出来ることが示されている。図2.2では、

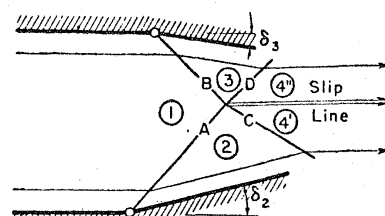
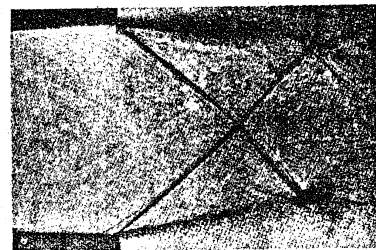


Fig. 2.1 Crossing of shock waves.

同じ向きの2つの衝撃波AとBが壁から発生して、それがぶつかることにより、一つの衝撃波Dと滑り流および膨張波（または弱い衝撃波）になることが示されている。ただし、この実験で発生している波は、全て非常に強い。ここでは、弱いけれども有限な振幅を持つ非線型波を系統的に解析する。

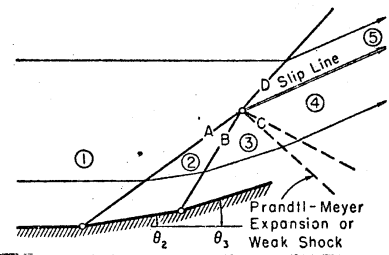
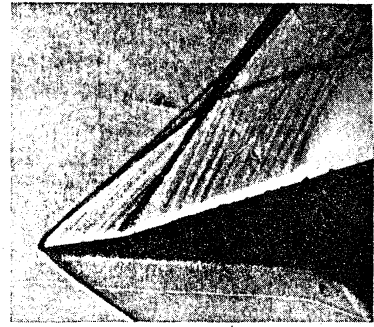


FIG. 2.2 Intersection of two left-running shock waves.

基礎方程式は、粘性及び熱伝導性を有する圧縮性流体を記述する通常の方程式であるが、定常な流れを考えているので、時間微分の項は無視する。又、弱い非線型波を取り扱うから、粘性係数および熱伝導率は、静止媒質中のものに置き換え、粘性散逸の項も無視して、結局、密度  $\rho$ 、速度  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 、温度  $T$  で次の形に書ける。

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \left( \frac{\rho T}{\gamma} \right) - \nu_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} \\ \quad - \delta_1 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \\ (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) T = -(\gamma-1) T \operatorname{div} \mathbf{v} - \delta_2 \operatorname{div} \operatorname{grad} T \end{array} \right. \quad (2.1)$$

ここで、微分は  $(x_1, x_2)$  についてであり、 $\gamma$  は比熱比、 $\mu$  は通常の動粘性係数、 $\delta_1$  と  $\delta_2$  はそれぞれ、体積粘性係数及び熱伝導率を密度で除したものである。後の便宜のために、代表的長さ  $L$ 、音速  $a_0$ 、密度  $\rho_0$ 、温度  $T_0$  で次のような無次元化を行う。

$$x' = \frac{x_1}{L}, \quad y' = \frac{x_2}{L}, \quad u' = \frac{v_1}{a_0}, \quad v' = \frac{v_2}{a_0}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad T' = \frac{T}{T_0}$$

方程式 (2.1) は、この無次元化で次のように書ける。

$$\frac{\partial W}{\partial y'} + A \frac{\partial W}{\partial x'} + B \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + C \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial y'} + D \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = 0. \quad (2.2)$$

ここで

$$W = \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ T' \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{v'^2 - T'}, \quad \begin{pmatrix} (v'^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} T') \frac{u'}{v'} & \rho' v' & -\rho' u' & \frac{1}{\gamma} \frac{\rho' u'}{v'} \\ \frac{1}{\gamma} (v'^2 - T') \frac{T'}{\rho' v'} & (v'^2 - T') \frac{u'}{v'} & 0 & \frac{1}{\gamma} (v'^2 - T') \frac{1}{v'} \\ -\frac{1}{\gamma} \frac{u' T'}{\rho'} & -T' & u' v' & -\frac{1}{\gamma} u' \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{u' T'}{\rho' v'} & (\gamma-1) v' T' & -(\gamma-1) u' T' & (v'^2 - \frac{1}{\gamma} T') \frac{u'}{v'} \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{v'^2 - T'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{R} \rho' & -\frac{1}{R_2 \delta} \frac{\rho'}{v'} \\ 0 & -(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}) (v'^2 - T') \frac{1}{v'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R} v' & \frac{1}{R_2 \delta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} (\gamma-1) T' & -\frac{1}{R_2} (v'^2 - \frac{1}{\gamma} T') \frac{1}{v'} \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

(2.3)

そして

$$R = \frac{a_0 L}{v_0} \quad R_1 = \frac{a_0 L}{\delta_1} \quad R_2 = \frac{a_0 L}{\delta_2}$$

方程式 (2.2) は, reductive perturbation method の一般論<sup>4)</sup> が適用される偏微分方程式であるが, 時間微分の代わりに, 空間微分  $\partial/\partial y$  が入っていることが, 本質的な相違点である。一般的に言って, reductive perturbation method は, 一次元の非線型波を扱う理論であるが, 我々は, 定常問題を考えることによって, 二次元の非線型波を扱うことができるようになったのである。

さて, (2.2) を reductive perturbation method を用いて解析し, 非線型波の従うべき単一の方程式を見いだすのが, 次の仕事である。

超音速の一樣速度は,  $y$  方向であると仮定して, 静止状態として,

$$W = W^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ M \\ 1 \end{bmatrix} \quad A^{(0)} = A(W^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{M}{M^2-1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\gamma M} & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma M} \\ 0 & -\frac{1}{M^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma-1)\frac{M}{M^2-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

ととる。M は Mach 数で,  $M > 1$  でなければ, 方程式 (2.2) は実数解を持たない。行列  $A^{(0)}$  は, 2 つの異なった固有値と, 1 つの

縮退した固有値を持つ。

$$\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \alpha \quad , \quad \Gamma_3 = \Gamma_4 = 0 \quad , \quad (\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}) \quad (2.5)$$

この静止状態の上に、弱い有限の大きさの非線型波が重畳されると考え、波の大きさを表すパラメータ  $\varepsilon$  で各量を展開する。

$$\begin{cases} W = W^{(0)} + \varepsilon W^{(1)} + \varepsilon^2 W^{(2)} + \dots , \\ A = A^{(0)} + \varepsilon A^{(1)} + \varepsilon^2 A^{(2)} + \dots , \quad \text{etc.} \end{cases} \quad (2.6)$$

それとともに、現象を次のような波とともに動く座標系で観察する ( $\xi_i = \text{constant}$  で表わされる曲線を特性線と呼ぶ)。

$$\begin{cases} \xi_i = \varepsilon [x' - r_i y' - \phi_i(x', y')] \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ \eta = \varepsilon^2 y' \end{cases} \quad (2.7)$$

ここで  $\phi_i$  は波が非線型であるために生じる相互作用の効果を表し、それ故、位相関数と呼ばれる。

(2.6) 及び (2.7) を (2.2) に代入し、 $\varepsilon$  の order について整理すると、容易に解が求まる。計算方法は、一次元の非線型波の解析<sup>5)</sup> と類似しているので、省略して、結果だけを示す。

まず第一に、流れ場が各々  $(\xi_i, \eta)$  を変数とする非線型波の重ね合わせで表わされるという、著しい単純化された結果が得



られる。

$$\begin{aligned}
 W = \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ T' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ M \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2\varepsilon}{(\gamma+1)M^2\alpha^3} F_1(\xi_1, \eta) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{M\alpha} \\ -\frac{1}{M} \\ \gamma-1 \end{pmatrix} - \frac{2\varepsilon}{(\gamma+1)M^2\alpha^3} F_2(\xi_2, \eta) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{M\alpha} \\ -\frac{1}{M} \\ \gamma-1 \end{pmatrix} \\
 &+ \varepsilon f_3(\xi_3, \eta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon f_4(\xi_4, \eta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

次に、各々の非線型波は、第1、第2のものは、Burgers  
方程式で、第3、第4のものは、熱伝導方程式で支配される。

$$\begin{cases} \frac{\partial F_i}{\partial \eta} + F_i \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2\beta R} M^3 \alpha^4 \frac{\partial^2 F_i}{\partial \xi_i^2} & (i=1,2) \\ \frac{\partial f_3}{\partial \eta} = \frac{1}{R_1 M} \frac{\partial^2 f_3}{\partial \xi_3^2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial \eta} = \frac{1}{\sigma R_2 M} \frac{\partial^2 f_4}{\partial \xi_4^2} \end{cases} \quad (2.9)$$

Burgers 方程式は、衝撃波および膨張波の解を持つ<sup>(2.5)</sup>ことから、  
第1及び第2の非線型波は、衝撃波と膨張波からなる。一方、  
第3の非線型波は、(2.8)を見てわかるように $v''$ のみが零でない  
ので、滑り流を表し、第4の非線型の波は、接触不連続面

を表す。

最後に、位相関数も以下のように決められる。この結果は、波の相互作用が、振幅変化のような大きな効果をひき起こさず、単に位相を変化させる程度のものであることを示している。

$$\phi_1 = \frac{\Gamma}{(\gamma+1)\alpha} \int^{\xi_2} F_2(\xi) d\xi - \frac{1}{2} M^3 \alpha^2 \int^{\xi_3} f_3(\xi) d\xi - M^2 \alpha^2 \int^{\xi_4} f_4(\xi) d\xi + \theta_1.$$

$$\phi_2 = -\frac{\Gamma}{(\gamma+1)\alpha} \int^{\xi_1} F_1(\xi) d\xi - \frac{1}{2} M^3 \alpha^2 \int^{\xi_3} f_3(\xi) d\xi - M^2 \alpha^2 \int^{\xi_4} f_4(\xi) d\xi + \theta_2.$$

$$\phi_3 = -\frac{2}{(\gamma+1)M^4\alpha^5} \int^{\xi_1} F_1(\xi) d\xi + \frac{2}{(\gamma+1)M^4\alpha^5} \int^{\xi_2} F_2(\xi) d\xi + \theta_3.$$

$$\phi_4 = \phi_3 - \theta_3 + \theta_4 \quad \left( \Gamma \equiv \frac{3-\gamma}{2} - \frac{2}{M} \right) \quad (2.10)$$

次に出て来る問題は、これら4種類の非線型波の相互作用を定量的に計算することである。異なる種類の波の相互作用は、(2.10)を計算すればよいし、同じ特性線に属する波の相互作用については、(2.9)を解けばよい。

### §3. 異なる特性線に属する非線型波の相互作用

まず、波の分類から始める。§2で導かれた4種類の波は、次の3つの特性線に沿って伝播する。

$$C_+ : x' - \alpha y' = \text{const.}$$

$$C_- : x' + \alpha y' = \text{const.}$$

$$C_0 : x' = \text{const.}$$

$C_{\pm}$ に属する波は、衝撃波と膨張波なので、それぞれ $\delta_{\pm}$ ,  $\kappa_{\pm}$ とし、 $C_0$ に属する波は滑り流と接触不連続面を表すから、それぞれ $\phi$ とする。従って、異なる特性線に属する波の相互作用は、 $(\delta_{\pm}, \delta_{\mp})$ ,  $(\delta_{\pm}, \kappa_{\mp})$ ,  $(\delta_{\pm}, \phi \text{ or } C)$ ,  $(\kappa_{\pm}, \kappa_{\mp})$ ,  $(\kappa_{\pm}, \phi \text{ or } C)$ の組について考えられる。計算例として、最も簡単な $(\delta_+, \delta_-)$ をとる。

### 2つの衝撃波の相互作用

2つの衝撃波は、(2.9)から、次のように求められる。

$$\begin{cases} F_i(\xi_i, \eta) = \frac{v_i}{2} \left[ (-1)^{i-1} - \tanh\left(\frac{\beta R}{M^2 \alpha^4} X_i\right) \right] \\ X_i = \xi_i - \frac{1}{2} (-1)^{i-1} v_i \eta = \varepsilon \left[ x' - (-1)^{i-1} \left(\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon v_i\right) y' - \phi_i \right] \end{cases}$$

$$v_1, v_2 > 0, \quad (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

簡単のために、 $R \rightarrow \infty$ の極限を考えて、

$$\begin{aligned} \delta_+ : F_1 &= \begin{cases} v_1 & X_1 < 0 \text{ のとき} \\ 0 & X_1 > 0 \text{ のとき} \end{cases} \\ \delta_- : F_2 &= \begin{cases} 0 & X_2 < 0 \text{ のとき} \\ -v_2 & X_2 > 0 \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

位相関数は、(3.2)を(2.10)に代入して、

$$\begin{aligned}\phi_1 &= x_1 + \frac{\Gamma}{(\delta+1)\alpha} \begin{cases} 0 & X_2 < 0 \text{ のとき} \\ v_2 X_2 & X_2 > 0 \text{ のとき} \end{cases} \\ \phi_2 &= x_2 - \frac{\Gamma}{(\delta+1)\alpha} \begin{cases} v_1 X_1 & X_1 < 0 \text{ のとき} \\ 0 & X_1 > 0 \text{ のとき} \end{cases}\end{aligned}\quad (3.3)$$

$x_1, x_2$  は、衝撃波  $\delta_+$  と  $\delta_-$  が、それぞれ、 $y'=0$  で占めている位置を表す。(3.3)を(3.1)に代入して、 $X_1=0, X_2=0$  とおけば、衝撃波  $\delta_+, \delta_-$  のフロントが求められる。即ち、衝突以前では、

$$\begin{aligned}\delta_+ : \quad x' &= x_1 + (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon v_1) y' \\ \delta_- : \quad x' &= x_2 - (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon v_2) y'\end{aligned}\quad (3.4)$$

衝突以後では、

$$\begin{aligned}\delta_+ : \quad x' &= x_1 + \frac{\varepsilon \Gamma}{(\delta+1)\alpha} v_2 (x_2 - x_1) + [\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon v_1 - \frac{2\varepsilon \Gamma}{(\delta+1)\alpha} v_2] y' \\ \delta_- : \quad x' &= x_2 - \frac{\varepsilon \Gamma}{(\delta+1)\alpha} v_1 (x_2 - x_1) - [\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon v_2 - \frac{2\varepsilon \Gamma}{(\delta+1)\alpha} v_1] y'\end{aligned}\quad (3.5)$$

相互作用の様子は、図3.1に示されている。他の非線型波の相互作用についても、同様の解析が行えて、結果は、図3.2から図3.5に示されているが、いずれの場合も、相互作用によって、波の位相速度が  $\varepsilon$  の order の微少量のずれしか被らないのが、その特徴である。

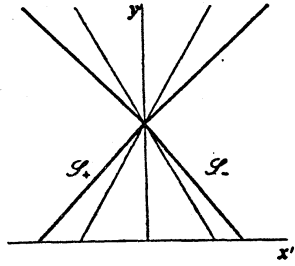


Fig.31. Intersection of two shocks.  $M=2.4$ ,  $\gamma=1.4$ ,  $\Gamma_2=-0.2$  (these data are common to all figures).  
 $\epsilon v_1=0.72$ ,  $\epsilon v_2=0.48$ .

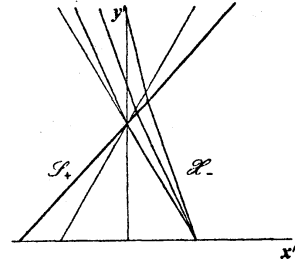


Fig.32. Intersection of a shock and an expansion wave.  $\epsilon v_1=0.72$ ,  $\epsilon v_2=0.24$ .

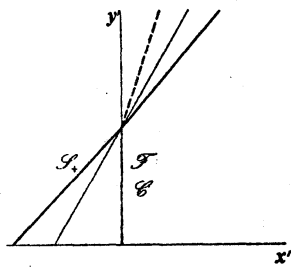


Fig.33. Intersection of a shock and a slip flow or a contact surface.  $\epsilon v_1=0.72$ ,  $\epsilon v_2=0.24$ .

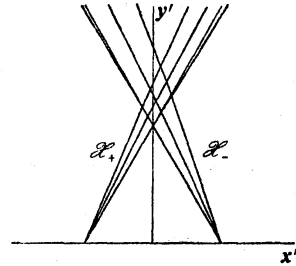


Fig.34. Intersection of two expansion waves.  $\epsilon v_1=0.16$ ,  $\epsilon v_2=0.24$ .

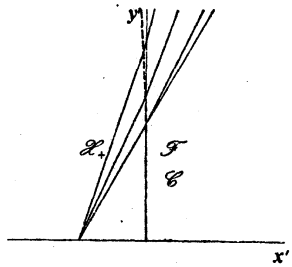


Fig.35. Intersection of an expansion wave with a slip flow or a contact surface.  $\epsilon v_1=0.24$ ,  $\epsilon v_2=0.24$ .

#### § 4. 同じ特性線に属する非線型波の相互作用

滑り流と接触不連続面は、(2.9)で表わされる線型方程式で支配されるので、相互作用は存在しない。他方、衝撃波と膨張波は Burgers 方程式に従い、その間には、波の形を変化させるような大きな相互作用が存在する。

この相互作用は、次のような Burgers 方程式の初期値問題を解くことにより計算される。

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \quad (4.1)$$

$$Re \equiv \frac{2\beta R}{M^3 \alpha^4}$$

ここで、 $F$  と  $\xi$  に付いている添字を、簡単のため省略した。(4.1) は、Hopf<sup>2)</sup> と Cole<sup>3)</sup> によって、次のような形で一般解が得られている。

$$F(\xi, \eta) = -\frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial \xi} \log \Theta(\xi, \eta) \quad (4.2)$$

$$\Theta(\xi, \eta) = \left( \frac{Re}{4\pi\eta} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{Re}{2} \int_{\xi}^{\xi'} F(\xi'', 0) d\xi'' - \frac{Re}{4} (\xi' - \xi)^2 \right] d\xi' \quad (4.3)$$

今、 $\eta=0$  で、次のように、衝撃波が  $\xi=\xi_1$  にあり、膨張波が  $\xi_1 < \xi < \xi_2$  の間に広がっているとして、発生する相互作用を追跡する。

$$F(\xi, 0) = \begin{cases} v_1 & \xi < \xi_1 \text{ のとき} \\ 0 & \xi_1 < \xi < \xi_2 \text{ のとき} \\ v_2 \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} & \xi_2 < \xi < \xi_3 \text{ のとき} \\ v_2 & \xi > \xi_3 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.4)$$

(4.4) を (4.3) と (4.2) に代入して  $R_e \rightarrow \infty$  の極限で  $F$  を求める。

相互作用が生じる以前 ( $\eta < \eta_1 = 2(\xi_2 - \xi_1)/v_1$ ) では

$$F(\xi, \eta) = \begin{cases} v_1 & \xi < \xi_1 + \frac{1}{2}v_1\eta \text{ のとき} \\ 0 & \xi_1 + \frac{1}{2}v_1\eta < \xi < \xi_2 \text{ のとき} \\ v_2 \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2 + v_2\eta} & \xi_2 < \xi < \xi_3 + v_2\eta \text{ のとき} \\ v_2 & \xi > \xi_3 + v_2\eta \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.5)$$

となり、衝撃波のフロントは

$$\xi = \xi_1 + \frac{1}{2}v_1\eta$$

で表わされる。相互作用が生じて後 ( $\eta > \eta_1$ ) は、衝撃波と膨張波の大小により結果が変わるが、ここでは、膨張波が大きい場合をとりあげる。そうすると

$$F(\xi, \eta) = \begin{cases} v_1 & \xi < \xi_1(\eta) \text{ のとき} \\ v_2 \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2 + v_2\eta} & \xi_1(\eta) < \xi < \xi_3 + v_2\eta \text{ のとき} \\ v_2 & \xi > \xi_3 + v_2\eta \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.6)$$

となり、衝撃波のフロントは、次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \xi = \xi_1(\eta) &\equiv \xi_2 + \frac{v_1}{v_2} (\xi_3 - \xi_2 + v_2\eta) \\ &\quad - \frac{1}{v_2} \left\{ v_1 [2v_2(\xi_2 - \xi_1) + v_1(\xi_3 - \xi_2)] (\xi_3 - \xi_2 + v_2\eta) \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

この場合の相互作用の様子は、図 (4.3) に示されているように。

衝撃波と膨張波の合体が徐々に生じ、 $\eta \rightarrow \infty$  では、衝撃波は無限に小さくなり、その軌跡は、膨張波の軌跡の一つに漸近する。

衝撃波の才が膨張波より大きい場合には、やがて前者が後者を吸収し、後には衝撃波のみが残る(図4.2)。

衝撃波と衝撃波の相互作用は、両者の合体に帰着する(図4.1)。

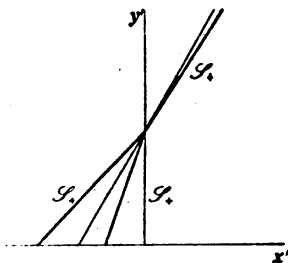


Fig. 4.1. Intersection of two shocks.  $\epsilon v_1 = 0.72$   
 $\epsilon v_2 = 0.48$ .

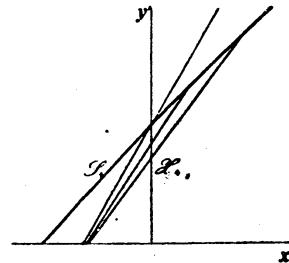


Fig. 4.2. Intersection of a shock and an expansion wave. (i) Shock is stronger than expansion wave.  $\epsilon v_1 = 0.72$ ,  $\epsilon v_2 = 0.16$ .

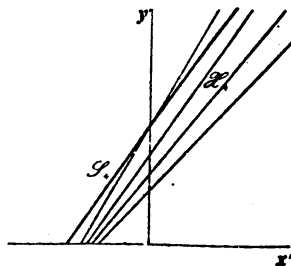


Fig. 4.3. Intersection of a shock and an expansion wave: (ii) Shock is weaker than expansion wave.  $\epsilon v_1 = 0.24$ ,  $\epsilon v_2 = 0.36$ .

以上で、非線型の相互作用は全て解析されたが、その中で特に重要なことは、非線型波の相互作用によって、元あった波が消滅することはない、新たに波が発生することはないことである。従って、もし、初期に、衝撃波と膨張波だけ



があったと仮定すれば、系はそれ以後も衝撃波と膨張波のみで構成される。

### §5. 2次元衝撃波乱流

圧縮性流体における2次元の一樣乱流を考察する。Reynolds数が非常に大きいとき、乱れ場は、膨張波を背景にした衝撃波、滑り流、接触不連続面のランダムな集合からなると予想される。波の振幅が小さいが有限であるとき、前節までの結果は、乱れ場として、膨張波を背景にした衝撃波のランダムな集合を考えることも可能にする。ここで、事態は、一次元の衝撃波乱流の場合と同じになる。

一次元の場合には、衝撃波及び膨張波は、 $u_0$ 及び $-u_0$ で伝播する二つのグループに分けられた。衝撃波と膨張波の列からなる各グループは、Burgers方程式で支配され、他のグループからの寄与は、位相関数を通してのみ入ってくる。従って場全体は、 $u_0$ 及び $-u_0$ で伝播する波を表す、二つのBurgers方程式の解の和になる。衝撃波と膨張波の列がランダムになっている一次元の衝撃波乱流は、位相関数の統計的性質に及ぼす影響が小さいので、統計的性質を問題にする限りでは、結局、 $\pm u_0$ で伝播する二つのBurgers乱流の和に等しい。

同じ議論が2次元の衝撃波乱流にも適用できる。§1.で述

べたように、乱れ場全体は、1ないし2個の衝撃波と膨張波を含む多数の局所場に分けられる。このような局所場は、局所的な Galilei 変換で定常にでき、局所場における衝撃波と膨張波は、定常座標系で  $C_+$  と  $C_-$  の2つの特性線に分けられる。そのとき1次元衝撃波乱流と同じ議論で、2次元衝撃波乱流の各局所場は、そこから場全体も、統計的性質を問題にする限りでは、Burgers 乱流と等価になる。

又、3次元衝撃波乱流は、平面の非線型波あるいは“石鹸の泡”のような曲った衝撃波のランダムな集合と想像されるが、2次元衝撃波乱流と実質的な相違はない。いずれの場合でも、場の不連続性は衝撃波の形をとり、連続的变化は膨張波が担っていて、衝撃波と膨張波の相互作用は共通である。このようにして、3次元衝撃波乱流も Burgers 乱流と等価であると言える。

#### References

- 1) M. J. Lighthill: Gas Dynamics of Cosmic Clouds, ed. H. C. Van de Hulst and J. M. Burgers (North Holland, Amsterdam, 1955) p. 121.
- 2) R. Courant and K. O. Friedrichs: Supersonic Flow and Shock Waves (Interscience, New York, 1948).
- 3) M. J. Lighthill: Surveys in Mechanics, ed. G. K. Batchelor and R. M. Davies (Cambridge University Press, 1956) p. 250.
- 4) T. Taniuti and C. C. Wei: J. Phys. Soc. Japan 24 (1968) 941.

- 5) T. Tatsumi and T. Tokunaga: J. Fluid Mech. 65 (1974) 581.
- 6) A. H. Shapiro: The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow  
(Ronald Press, 1953) Vol. 1, p. 556.
- 7) E. Hopf: Comm. Pure Appl. Math. 3 (1950) 201.
- 8) J. D. Cole: Quart. Appl. Math. 9 (1951) 225.